EXERCICE 19:

1) $\text{Cos}^4(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$

$=\frac{1}{16}.[e^{4ix}+4e^{i3x}.e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-2ix}+4^{cix}e^{-3ix}+e^{-4ix}]$

$=\frac{1}{16}[(e^{4ix}+e^{-4ix})+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6]$

$=\frac{1}{16}[2\cos(4x)+8\cos(2x)+6]$

$\text{Cos}^4(x)=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

2) (E) : $y''+y=\cos^4(x)$

$g(x)=a.\cos(4x)+b.\cos(2x)+c$

$g'(x)=-4a\sin(4x)-2b\sin(2x)$

$g''(x)=-16a\cos(4x)-4b\cos(2x)$

g est une solution de (E) $\Leftrightarrow$

$g''(x)+g(x)=\cos^4(x)\Leftrightarrow$

$-16a\cos(4x)-4b\cos(2x)+a\cos(4x)+b\cos(2x)+c=\cos(4x) \Leftrightarrow$

$-15a\cos(4x)-3b\cos(2x)+c=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}-15a=\frac{1}{8}\\-3b=\frac{1}{2}\\c=\frac{3}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{120}\\b=-\frac{1}{6}\\c=\frac{3}{8}\end{cases}$

D'où $g(x)=-\frac{1}{120}\cos(4x)-\frac{1}{6}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

3) f solution de (E)$\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=\cos^4(x)$

$\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=g''(x)+g(x)$

$\Leftrightarrow (f-g)''(x)+(f-g)(x)=0$

$\Leftrightarrow$f-g est une solution de l'éq :$y''+y=0$

4) *f solution de (E)$\Leftrightarrow$f-g solution de $y''+y=0$

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)$ AetB réels

$\Leftrightarrow f(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)+g(x)$

$\Leftrightarrow f(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)-\frac{1}{120}\cos(4x)-\frac{1}{6}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

* f solution de (E) et f(0)=1 et f'(0)=0

$f'(x)=A.\cos(x)-B.\sin(x)+\frac{1}{30}\sin(4x)+\frac{1}{3}\sin(2x)$

$\begin{cases}f(0)=1\\f'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B-\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=1\\A=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=\frac{4}{5}\end{cases}$

D'où

$f(x)=\frac{4}{5}\cos(x)-\frac{1}{120}\cos(4x)-\frac{1}{6}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

EXERCICE 20 :

(E) : $4y''+\pi^2 y=0$

Qarray.tn-Aqra Blech- Qarray.tn